Carpeta de Matemática 2
Nueva edición ampliada y actualizada

CUADERNILLO 4

Nueva carpeta de Matemática V

Ruth Schaposchnik (coord.)
Carlos Abdala - Mónica Real - Claudio Turano

Alumno/a

Curso

4. Funciones racionales 3
Revisión inicial 4
Funciones de proporcionalidad inversa 5
Funciones de fórmula: $f(x) = \frac{k}{x}$ 6
Funciones de fórmula: $f(x) = \frac{k}{ax + b}$ 8
Funciones de fórmula: $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ 10
Funciones racionales 12
Funciones de fórmula: $f(x) = \frac{k}{(x - a)^2}$ 14
Funciones de fórmula: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ 16
En el mundo real 17
Lentes y lupas 17
La primera ley cuantitativa en la historia de la Física 18
Más actividades 19
Autoevaluación 22

AIQUE

Este CUADERNILLO 4 pertenece a la Nueva carpeta de Matemática V.
No puede venderse por separado.

DIRECCIÓN EDITORIAL
Teresita Valdettaro

COORDINACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA
Ruth Schaposchnik

EDICIÓN
Gustavo Zorzoli

CORRECCIÓN
Cecilia Biagioli (coordinación)
Mercedes Seara

SUPERVISIÓN GRÁFICA
Verónica Uher
Victoria Maier

COORDINACIÓN GRÁFICA
Constanza Di Gregorio - Silvina Roveda

DIAGRAMACIÓN
Constanza Di Gregorio - Silvana López

ILUSTRACIONES
Diego Molina
Estudio DOBLEVUELO (aperturas)

FOTOGRAFÍA
Archivo Aique

PRODUCCIÓN INDUSTRIAL
Pablo Sibione

© Copyright Aique Grupo Editor S. A.
Valentín Gómez 3530 (C1191AAP)
Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
e-mail: editorial@aique.com.ar - www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la Ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
ISBN 978-987-06-0077-0
Primera edición

La reproducción total o parcial de este material en cualquier forma que sea, idéntica o modificada y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático, magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

Turano, Claudio
Nueva carpeta de matemática V / Claudio Turano ; Carlos Abdala ; Mónica Real ; coordinado por Ruth Schaposchnik - 1a ed. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2007.
160 p. ; 28x20 cm.

ISBN 978-987-06-0077-0

1. Matemática. I. Abdala, Carlos II. Real, Mónica III. Schaposchnik, Ruth, coord. IV. Título
CDD 372.7

Esta edición se terminó de imprimir en febrero de 2007 en Latingráfica. Rocamora 4161, Ciudad de Buenos Aires.

4 FUNCIONES RACIONALES

Tanto en el campo de la Economía, la Física, la Química, la Demografía y otras ciencias, se utilizan modelos asociados a *funciones racionales*. Desde la más simple (la función de proporcionalidad inversa), hasta la más compleja (el cociente de dos polinomios), se estudian para describir fenómenos naturales y para modelizar situaciones creadas experimentalmente. El análisis de este tipo de funciones hace necesario abordar el concepto de *asíntota* e introduce la noción de *límite*.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

REVISIÓN INICIAL

1 Una ensalada de legumbres y brotes, para 8 personas, requiere: 800 g de lentejas cocidas, 350 g de porotos, 250 g de brotes de soja, 2 cucharadas de cebolla de verdeo picada, 100 g de lomito y condimentos a gusto. Indiquen cuánto se necesita de cada insumo para elaborar la misma ensalada, pero para:

a) 4 personas.

b) 6 personas.

c) 12 personas.

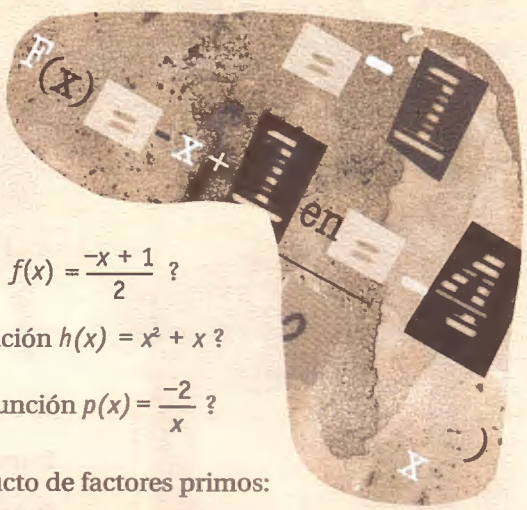
2 Se debe cubrir una franja rectangular de 3 m de largo y 0,5 m de ancho con baldosas de madera del mismo ancho.

a) Completen la tabla.

Largo de la baldosa (m)	0,25	1,5	0,1	0,5	x
Número de baldosas					

b) ¿Cuál es la expresión que relaciona el número de baldosas con el largo de ellas? Esta relación, ¿es función? Justifiquen.

3 Definan los conceptos *dominio* e *imagen* de una función.



4 Respondan:

a) ¿Cuál es la imagen de $x = -4$ a través de la función $f(x) = \frac{-x + 1}{2}$?

b) ¿Cuál es la preimagen para $h = -2$ a través de la función $h(x) = x^2 + x$?

c) ¿Cuál es la preimagen para $p = -\frac{3}{2}$ a través de la función $p(x) = \frac{-2}{x}$?

5 Expresen los siguientes polinomios como un producto de factores primos:

a) $x^3 - x^2 - 4x + 4$

b) $-2x^4 - 2x^3 + 24x^2$

6 Hallen, en cada caso, los puntos de contacto con los ejes, los conjuntos de positividad y de negatividad, y luego realicen un gráfico aproximado de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^3 - 4x^2$

b) $m(x) = x^4 + x^2$

7 Indiquen los valores de x que verifican las siguientes igualdades.

a) $\frac{x - 1}{x - 2} - \frac{x^2}{x^2 + x} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{x + 3}{x^2 - 9} + \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x}{x - 1} = 0$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Funciones de proporcionalidad inversa

8 Sabrina debe recorrer una distancia de 630 km en su auto y quiere calcular, en forma aproximada, el tiempo que debería tardar en recorrerla de acuerdo con la velocidad constante a la que circule.

T (h)	V (km/h)
	63
9	
	90
6	
	100

a) Ayuden a Sabrina a completar la tabla.

b) Escriban una expresión que permita calcular el tiempo (en horas) en función de la velocidad (en km/h).

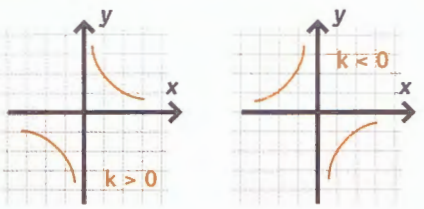
c) Grafiquen la relación anterior en un sistema cartesiano.

Para leer y recordar

- Se llama *función de proporcionalidad inversa* a toda función cuya fórmula es:

$$f(x) = \frac{k}{x} \text{ (con } k \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ y } x \neq 0)$$

- Su gráfica es una curva denominada *hipérbola equilátera*.



Arriba aparecen las gráficas de los tipos de *hipérbola equilátera*. Con $k > 0$, las ramas están en el 1.° y 3.° cuadrante, y para $k < 0$, las ramas están en la 2.° y 4.° cuadrante.

9 Fernando cuenta con 120 frascos de perfume del mismo tamaño y decide guardar todos en cajas iguales que contengan la misma cantidad de frascos cada una. Si elige las cajas más grandes, puede colocar 12 frascos en cada una; y si elige las más chiquitas, 2.

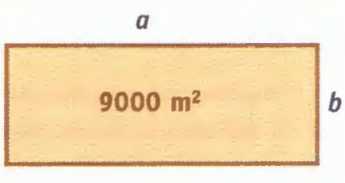
a) Encuentren la expresión que relaciona el número de cajas y la cantidad de frascos por caja. Esta relación es función. ¿Por qué?

b) ¿Cuántas posibilidades tiene?

c) Realicen un gráfico cartesiano de la relación anterior.

d) Considerando el campo numérico al cual se ajusta el problema, ¿tiene sentido unir los puntos marcados en el gráfico? Justifiquen.

10 El abuelo de Marcos tiene 20 hectáreas de campo en General Villegas. Para la mayoría de edad del nieto, decide regalarle 9000 m^2 de terreno. La condición que le pide Marcos es que sea de forma rectangular y, además, que debe cercar ese terreno.



a) Observen el esquema del terreno y elaboren una tabla con 5 ó 6 posibles valores de a y b.

b) Hallen una expresión que relacione el largo del terreno con el ancho. Dicha relación, ¿es función? ¿Por qué?

c) Grafiquen la relación anterior en un sistema de ejes cartesianos.

d) Considerando el conjunto numérico al cual se ajusta el problema, ¿tiene sentido unir los puntos marcados en el gráfico? Justifiquen.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Funciones de fórmula: $f(x) = \frac{k}{x}$

11 Consideren la función: $f(x) = \frac{4}{x}$.

a) ¿Cuál es el dominio y cuál es el conjunto imagen? Justifiquen.

b) ¿Cuál es la intersección con los ejes?

c) Completen la tabla con el signo que toma la función y determinen, así, los conjuntos de positividad y de negatividad.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
Signo de f		⊗	

El símbolo ⊗ significa que la función no tiene signo para ese valor de x, ya que se anula o no está definida.

d) Completen la tabla siguiente y, luego, respondan a la pregunta:

x	10	100	1000	10 000
$f(x)$				

Cuando x toma valores positivos muy grandes, ¿a qué valor se aproximan las imágenes?

e) Completen la tabla siguiente y luego respondan a la pregunta:

x	−10	−100	−1000	−10 000
$f(x)$				

Cuando x toma valores negativos muy grandes, ¿a qué valor se aproximan las imágenes?

Para leer y recordar

- **Decimos que una recta de ecuación $y = b$ ($b \in \mathbb{R}$) es una *asíntota horizontal* de la función f cuando, a medida que el valor absoluto de x aumenta, la función se aproxima a b.**

  Ejemplo: la asíntota horizontal de la función $f(x) = \frac{4}{x}$ es la recta de ecuación $y = 0$.

- **Simbólicamente, la idea de que *a medida que x toma valores absolutos muy grandes, f se acerca a b* se representa:** $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$

  Esta expresión se lee: el límite cuando x tiende a infinito de f es b.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

12 Consideren la función: $f(x) = \frac{-2}{x}$.

a) Analicen qué sucede cuando x se aproxima al valor que no forma parte del dominio, en este caso $x = 0$, por la derecha. Completen la tabla y, luego, respondan a la pregunta.

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$				

Cuando x toma valores positivos muy próximos a cero, ¿a qué valor se aproximan las imágenes?

b) Analicen qué sucede cuando x se aproxima al valor que no forma parte del dominio, en este caso $x = 0$, por la izquierda. Completen la tabla y, luego, respondan a la pregunta.

x	−0,1	−0,01	−0,001	−0,0001
$f(x)$				

Cuando x toma valores negativos muy próximos a cero, ¿a qué valor se aproximan las imágenes?

Para leer y recordar

- Decimos que una recta de ecuación $x = a$, *si* $a \notin Dom_f$, es una *asíntota vertical* de la función f cuando, a medida que x toma valores más próximos a a, las imágenes toman valores absolutos cada vez mayores.

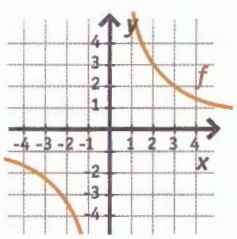
  Ejemplo: la asíntota vertical de la función $f(x) = \frac{-2}{x}$ es la recta de ecuación: $x = 0$.

- Simbólicamente, la idea de que *a medida que x se acerca a a*, $f(x)$ toma valores muy grandes en valor absoluto se representa:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

  Esta expresión se lee: el límite cuando x tiende a a de $f(x)$ es infinito.

  En la gráfica de la función f, se aprecia que tiene dos asíntotas: una horizontal ($y = 0$) y otra vertical ($x = 0$).



13 De cada una de las siguientes funciones, indiquen el dominio, el conjunto imagen, las coordenadas de los puntos de contacto con los ejes, escriban los conjuntos de positividad y de negatividad, la ecuación de las asíntotas verticales y horizontales, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y grafiquen la función.

a) $f(x) = -\frac{5}{x}$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x}$ **c)** $f(x) = -\frac{8}{x}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Funciones de fórmula: $f(x) = \frac{k}{ax + b}$

14 Andrés desea juntar $1000 y, para ello, decide depositar una cierta cantidad de dinero en un banco y dejarla depositada durante un año. Luego de recorrer varias entidades bancarias, elabora el siguiente cuadro, donde relaciona la tasa de interés anual y el capital que debería depositar.

Tasa anual (%) x	Capital depositado ($) C
7	934,60
8	925,90
10	909,10
12	892,90

a) ¿Cuál es la expresión que relaciona el capital que debe depositar C en función de la tasa anual x?

$$C(x) = \frac{1000}{\ldots + 1}$$

b) Para una tasa del 5%, ¿cuánto dinero debería depositar?

c) Si deposita $877,19, ¿cuál sería la tasa anual?

Para observar

- Toda función de la forma $f(x) = \frac{k}{ax + b}$ tiene las siguientes características:
  - $Dom_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{a}\right\}$ e $Im_f = \mathbb{R} - \{0\}$
  - Asíntota vertical: $x = -\frac{b}{a}$
  - Asíntota horizontal: $y = 0$
- Para $x = -\frac{b}{a}$ no hay imagen y, para graficarla, es necesario levantar el lápiz. Decimos entonces que la función es discontinua en $x = -\frac{b}{a}$.

15 Consideren la función: $f(x) = \frac{1}{x + 1}$.

a) Indiquen el dominio y el conjunto imagen. Justifiquen.

b) Indiquen la intersección con los ejes.

c) Completen la tabla con el signo que toma la función y determinen los conjuntos de positividad y de negatividad.

x	$(-\infty; \ldots.)$	....	$(\ldots.; +\infty)$
Signo de f		⊗	

d) Determinen las asíntotas vertical y horizontal. Justifiquen la respuesta.

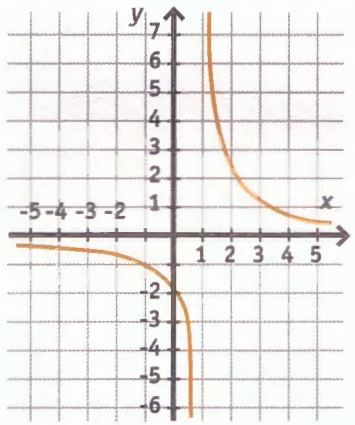
e) Realicen el gráfico.

f) Encuentren para qué valor de x hay discontinuidad.

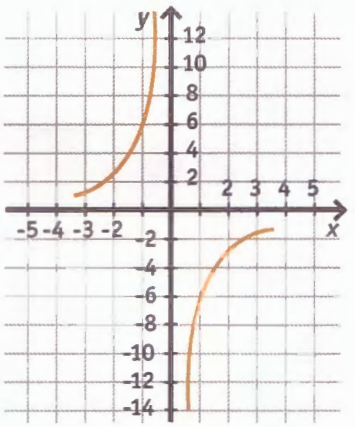
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

16 Para cada uno de los siguientes gráficos, indiquen el dominio, la imagen, los conjuntos de positividad y de negatividad, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los puntos de discontinuidad, y si responden a la fórmula: $f(x) = \frac{k}{x}$ o a la forma $f(x) = \frac{k}{ax + b}$.

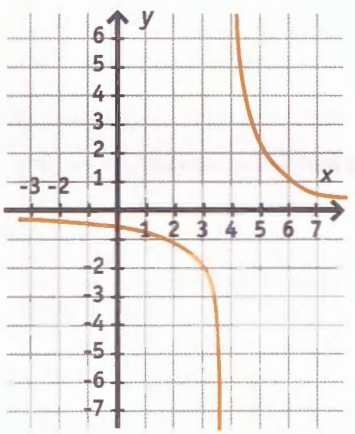
a)



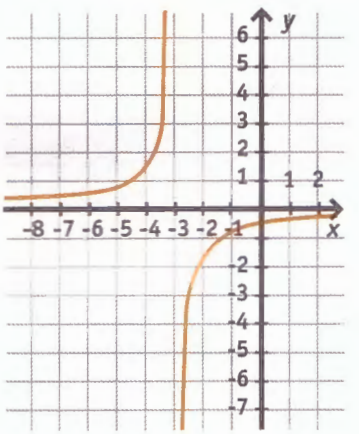
c)



b)



d)



17 Escriban, para cada uno de los casos del ejercicio anterior, las ecuaciones de las asíntotas horizontal y vertical. Justifiquen la respuesta usando límites de la forma:

$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ (c corresponde a un valor de x para el cual hay asíntota vertical), o $\lim_{x \to \infty} f(x) = d$ (d corresponde a un valor de y para el cual hay asíntota horizontal).

18 Propongan una función de la forma $f(x) = \frac{k}{ax + b}$ que tenga una asíntota vertical en $f(x) = -\frac{3}{4}$ y tal que $f(1) = 1$. Grafiquen la función.

19 De cada una de las siguientes funciones, indiquen el dominio, el conjunto imagen, las coordenadas de los puntos de contacto con los ejes, escriban los conjuntos de positividad y de negatividad, las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales, los límites que justifiquen las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los puntos de discontinuidad, y grafiquen la función.

a) $f(x) = \frac{3}{x - 2}$

b) $f(x) = -\frac{2}{2x + 2}$

c) $f(x) = \frac{4}{2x + 3}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Funciones de fórmula: $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$

20 Relean el problema **14**. Consideren la variante de que la abuela de Andrés le prometió que le regalará $200 en el momento del depósito.

a) Completen la tabla con el capital que debe depositar, aproximado a los centésimos.

Tasa anual (%) x	7	8	10	12
Capital depositado ($) C				

b) Encuentren la expresión que relaciona el capital C depositado en función de x.

$$C(x) = \frac{1000}{\frac{x}{100} + 1} - \dots$$

c) Si la tasa es de 3,5%, ¿cuál debería ser el capital depositado?

d) Si el capital depositado es de $743,40, ¿cuál debería ser la tasa de interés?

Para observar

- Toda función de la forma $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ con $c \neq 0$ se denomina *función homográfica.*
- El dominio y el conjunto imagen son: $Dom_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ e $Im_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$.
- La ecuación de la asíntota vertical es: $x = -\frac{d}{c}$, y la de la asíntota horizontal es: $y = \frac{a}{c}$.

  Otra forma de obtener la ecuación de la asíntota horizontal es haciendo la división de los polinomios.

21 Condiseren la función: $f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$.

a) Indiquen el conjunto dominio y el conjunto imagen. Justifiquen.

b) Indiquen la intersección con los ejes.

c) Completen la tabla con el signo que toma la función y determinen los conjuntos de positividad y de negatividad.

x	$(-\infty; \dots)$	....	$(\dots; \dots)$	....	$(\dots; +\infty)$
Signo de f		⊗		⊗	

d) Determinen las asíntotas vertical y horizontal. Justifiquen la respuesta.

e) Determinen los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

f) Realicen el gráfico.

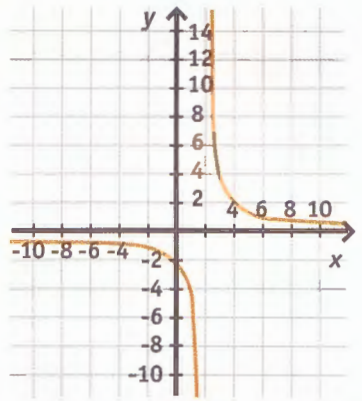
g) Encuentren para qué valor de x hay discontinuidad.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

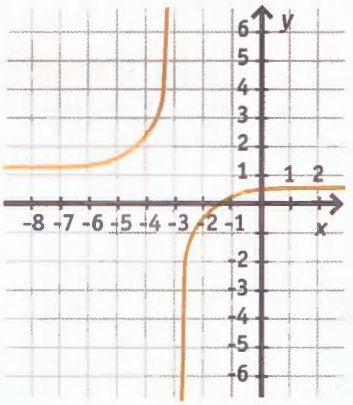
22 Para cada uno de los siguientes gráficos correspondientes a funciones homográficas, indiquen el dominio, la imagen, los conjuntos de positividad y de negatividad, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los puntos de discontinuidad y a cuál de las siguientes fórmulas responde:

$f(x) = \frac{k}{x}$, $f(x) = \frac{k}{ax + b}$ o $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$.

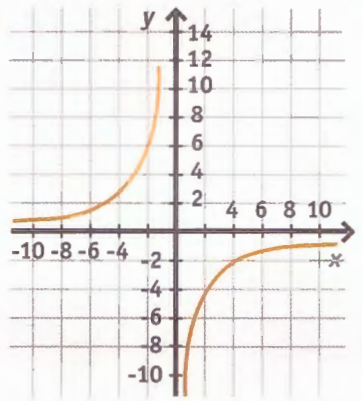
a)



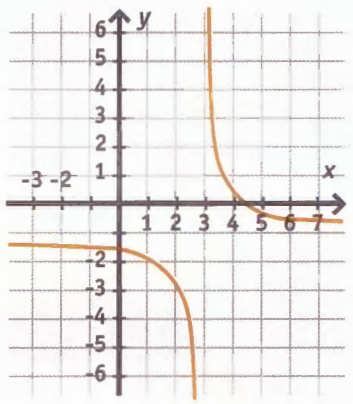
c)



b)



d)



23 Escriban, para cada uno de los casos del ejercicio anterior, las ecuaciones de las asíntotas horizontal y vertical. Justifiquen la respuesta usando límites de una de las siguientes formas:

$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ (c corresponde a un valor de x para el cual hay asíntota vertical)

$\lim_{x \to \infty} f(x) = d$ (d corresponde a un valor de y para el cual hay asíntota horizontal).

24 De cada una de las siguientes funciones, indiquen el dominio, la imagen, las coordenadas de los puntos de contacto con los ejes, escriban los conjuntos de positividad y de negatividad, la ecuación de las asíntotas verticales y horizontales, los límites que justifiquen las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los puntos de discontinuidad y grafiquen la función.

a) $f(x) = \frac{x + 3}{2x - 2}$ b) $f(x) = -\frac{2x - 1}{x + 4}$ c) $f(x) = -\frac{3x + 6}{2x - 4}$

25 Para la función $g(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$, indiquen si los siguientes valores pertenecen al conjunto imagen: $y = 2$; $y = -1$; $y = 1$; $y = \pi$ e $y = -2{,}5$.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Funciones racionales

Para leer y recordar

- Toda función de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x) \neq 0$, se denomina *función racional*. Las funciones homográficas son también funciones racionales.
- $Dom_f = \mathbb{R} - \{x / Q(x) = 0\}$, es decir, todos los números reales, menos las raíces del denominador.

Ejemplo: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, $h(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 6}$.

26 Consideren la función: $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$.

Observen que puede encontrarse una expresión equivalente a $f(x)$, para todos los valores de x, excepto los que anulan el denominador.

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{x + 1}; \text{ para } x \neq 1$$

Utilicen la expresión simplificada, que difiere de la original en $x = 1$, y respondan a las consignas.

a) ¿Cuál es el dominio y cuál es el conjunto imagen? Justifiquen.

b) Indiquen la intersección con los ejes.

c) Completen la tabla con el signo que toma la función y determinen los conjuntos de positividad y de negatividad.

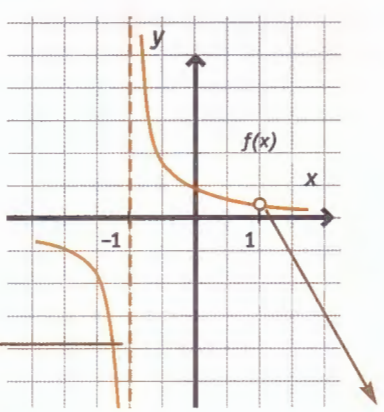
x	$(-\infty; \ldots.)$	....	$(\ldots.; \ldots.)$	....	$(\ldots.; +\infty)$
Signo de f		⊗		⊗	

d) Determinen la asíntota horizontal. Justifiquen la respuesta.

e) Encuentren para qué valor de x hay discontinuidad.

f) Determinen los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

g) Expliquen cómo se visualizan en el gráfico de la función todas sus respuestas.



En $x = -1$ existe una discontinuidad esencial.

En $x = 1$ existe una discontinuidad evitable.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

27 De cada una de las siguientes funciones, indiquen el dominio, la imagen, las coordenadas de los puntos de contacto con los ejes, escriban los conjuntos de positividad y de negatividad, la ecuación de las asíntotas verticales y horizontales, los límites que justifiquen las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los puntos de discontinuidad, y grafiquen la función.

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4}$

b) $h(x) = \dfrac{x}{x+2}$

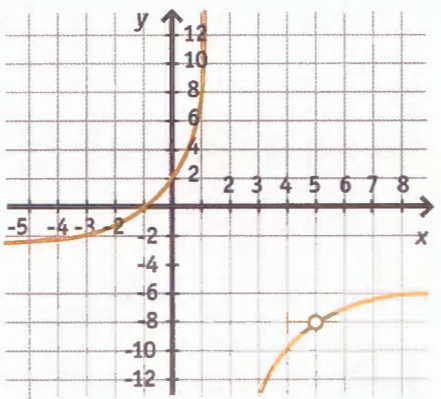
c) $m(x) = \dfrac{x^2+3x}{x^2-4x}$

d) $g(x) = -\dfrac{x^2-1}{x+1}$

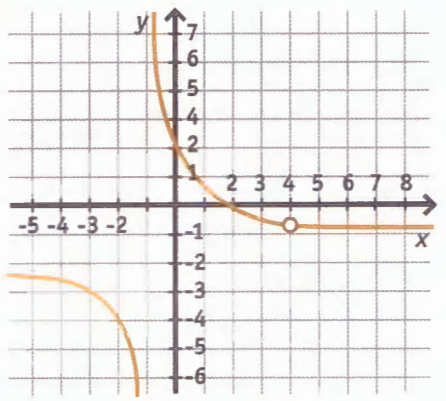
28 Verifiquen si, en cada uno de los casos anteriores, la gráfica corta la asíntota horizontal, es decir, si $y = b$ pertenece al conjunto imagen de la función.

29 Para cada uno de los siguientes gráficos correspondientes a funciones homográficas, indiquen el dominio, la imagen, las asíntotas, las raíces, la ordenada al origen, los conjuntos de positividad y de negatividad, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los puntos de discontinuidad.

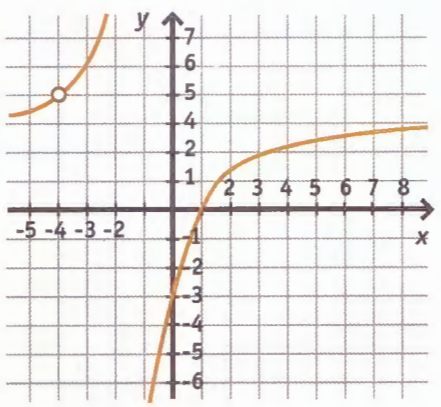
a)



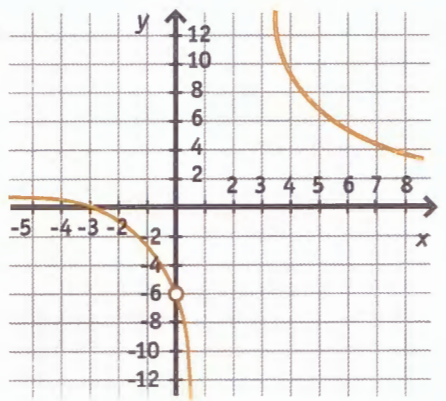
c)



b)



d)



30 Inventen una función racional que cumpla, en cada caso, con las siguientes condiciones:

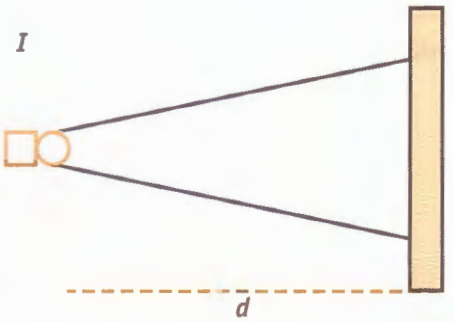
a) El numerador sea un polinomio de primer grado, el denominador un polinomio de segundo grado, pase por el punto (0; 1) y tenga asíntota horizontal $x = 0$.

b) El numerador sea una constante, el denominador un polinomio de segundo grado, y tenga 2 asíntotas verticales $x = 1$ y $x = -2$.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Funciones de fórmula: $f(x) = \frac{k}{(x-a)^2}$

31 Jorge decide experimentar la relación entre la intensidad de una fuente luminosa y la distancia sobre la normal a una pantalla plana, cuando se ilumina esta última. Llegó a la conclusión de que, para lograr la misma iluminación sobre la pantalla, si duplicaba la intensidad, debía colocar la fuente al cuadrado de la distancia.



Llamamos iluminación E (se mide en lux: lx) al cociente entre la intensidad I (medida en candelas: cd) y el cuadrado de la distancia d (metros) entre la pantalla y la fuente.

a) Escriban la expresión que relaciona la iluminación, la intensidad y la distancia.

b) Si la intensidad de una fuente es de 36 cd, completen el cuadro.

d (m)	1	2	3	4
E (lx)				

c) Grafiquen la relación anterior en un sistema cartesiano.

Para leer y recordar

Toda función de la forma $f(x) = \frac{k}{x^2}$ tiene las siguientes características:

- **$Dom_f = \mathbb{R} - \{0\}$ e $Im_f = \mathbb{R} - \{0\}$**
- **Asíntota vertical: $x = 0$**
- **Asíntota horizontal: $y = 0$**

32 Consideren la función: $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

a) Indiquen el dominio de f.

b) ¿Cuál es el conjunto imagen de f?

c) Indiquen las intersecciones con los ejes.

d) Completen la siguiente tabla con el signo de f, indiquen los ceros y los conjuntos de positividad y de negatividad de f.

x	$(-\infty; \ldots.)$	....	$(\ldots.; +\infty)$
Signo de f		⊗	

e) Indiquen las ecuaciones de las asíntotas. Justifiquen.

f) Determinen los conjuntos de crecimiento y de decrecimiento.

g) ¿Hay puntos de discontinuidad? ¿Cuáles son?

h) Realicen el gráfico.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

33 De cada una de las siguientes funciones, indiquen el dominio, la imagen (cuando sea posible), las coordenadas de los puntos de contacto con los ejes, escriban los conjuntos de positividad y de negatividad, las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales, los límites que justifiquen las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los puntos de discontinuidad, y grafiquen la función.

a) $f(x) = -\frac{2}{x^2}$

b) $h(z) = \frac{1}{z^3}$

c) $m(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

d) $g(x) = -\frac{4}{(x-2)^2}$

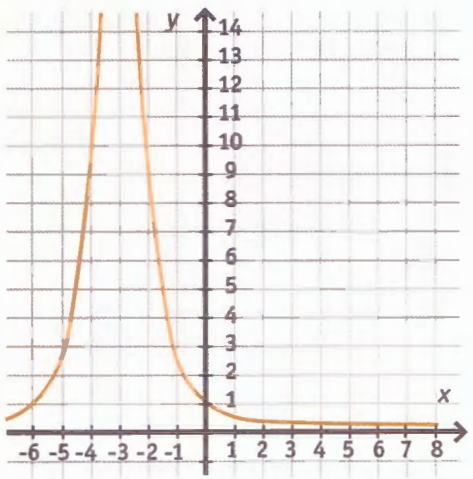
e) $j(x) = \frac{1}{x^2+1}$

f) $r(t) = \frac{t}{t^2+1}$

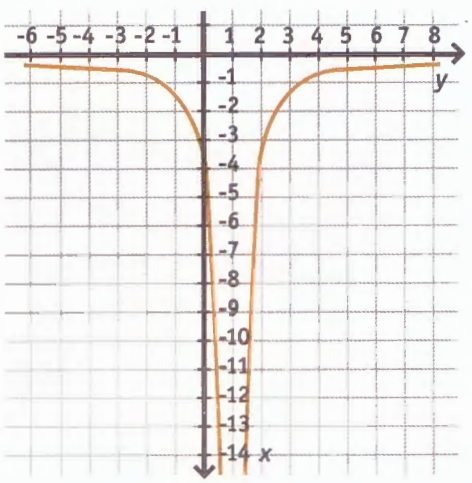
34 Verifiquen si, en cada uno de los casos anteriores, la función corta la asíntota horizontal, es decir, si $y = b$ es imagen de la función.

35 Para cada uno de los siguientes gráficos correspondientes a las funciones racionales, se pide que indiquen el dominio, la imagen, las asíntotas, las raíces, la ordenada al origen, los conjuntos de positividad y de negatividad, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los puntos de discontinuidad.

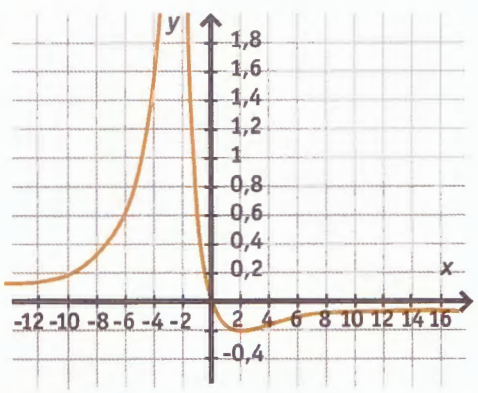
a)



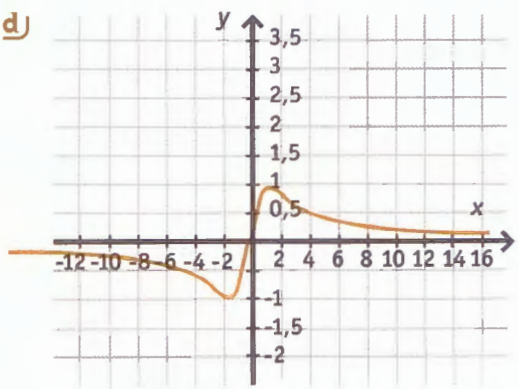
c)



b)



d)



36 Inventen una función del tipo $f(x) = \frac{k}{(x-a)^2}$ que cumpla, en cada caso, con las siguientes condiciones:

a) Pase por el punto (-1; 1) y tenga asíntota vertical en $x = 2$.

b) Tenga una asíntota vertical en $x = 1$, y su conjunto imagen sean los reales negativos.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Funciones de fórmula: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

37 En un bingo de Villa Carlos Paz, se debe repartir un premio de $30 000 en partes iguales entre los ganadores. Cada uno de los que recibe el premio debe pagar al bingo $2 por ganador.

a) Completen la siguiente tabla.

Premio ganado por persona (P)				
Número de personas ganadoras (x)	10	20	40	50

b) Si Fernando recibió $1970, ¿cuántas personas ganaron?

c) Escriban la expresión que relaciona el premio neto recibido por cada ganador y la cantidad de personas que ganaron.

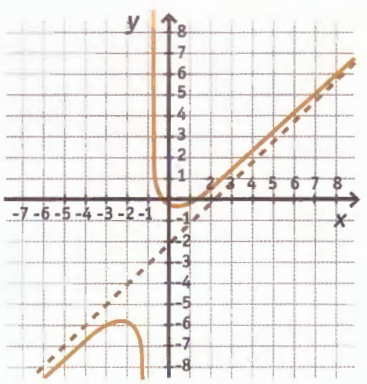
Para leer y recordar

Toda función de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, $Q(x) \neq 0$, y la diferencia entre los grados de $P(x)$ y $Q(x)$ es uno, tiene una *asíntota oblicua*.

Una de las formas de obtenerla es hallando el cociente de la división entre los polinomios.

Ejemplo: $f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$, entonces $(x^2 - x):(x + 1)$, tiene como cociente: $C(x) = x - 2$, por lo tanto, la asíntota oblicua es: $y = x - 2$. (No se considera el resto de la división).

Gráficamente: $f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$

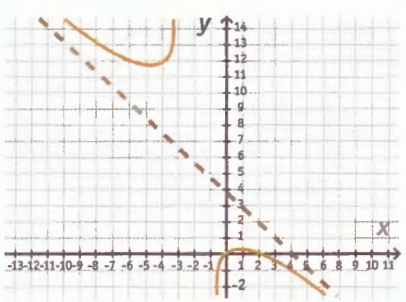


38 De cada una de las siguientes funciones, indiquen el dominio, las coordenadas de los puntos de contacto con los ejes, escriban los conjuntos de positividad y de negatividad, la ecuación de las asíntotas verticales y oblicuas, y los puntos de discontinuidad.

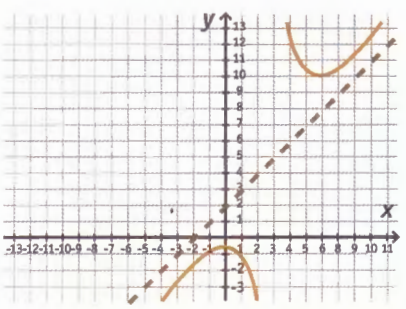
a) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 1}$ b) $r(x) = \frac{x^2 + 1}{-x + 2}$ c) $t(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4}$

39 Para cada uno de los siguientes gráficos correspondientes a funciones racionales, indiquen el dominio, las ecuaciones de las asíntotas, las raíces, la ordenada al origen, los conjuntos de positividad y de negatividad, y los puntos de discontinuidad.

a)



b)

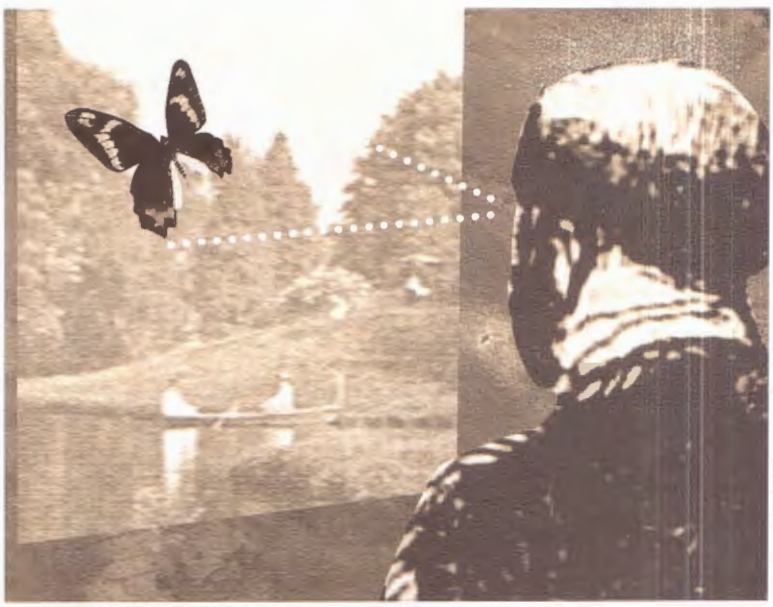


© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Lentes y lupas

"... Al atardecer de un día caluroso, estaba yo sentado, con un libro en las manos, junto a una ventana abierta desde la que se veía un cerro lejano más allá del río. (...). Levanté mi vista, miré distraídamente hacia la desnuda falda del cerro y vi algo singular: un monstruo repugnante descendió ligero desde la cumbre y desapareció en el bosque que había al pie..." (Fragmentos de la narración "La esfinge", de Edgar A. Poe).

La escena descripta en el texto puede explicarse de la siguiente manera:



El vidrio de la ventana actuó como una especie de lente, al aumentar el ángulo de la visual; y, por consiguiente, la imagen del objeto ocupó más sitio en la retina del ojo del observador del texto de Poe.
Este fenómeno ocurre también en el microscopio y en el telescopio, que varían la marcha de los rayos que se reflejan en el objeto, aumentando el ángulo de la visual, lo que hace que la imagen que se forma en la retina se extienda.
El microscopio más simple es el de una sola lente y es llamado, comúnmente, *lupa*.

El aumento de este tipo de lente (cociente entre el tamaño del objeto aumentado y el tamaño real) está dado por la expresión: $A = \frac{-f}{x-f}$, donde f representa la distancia focal; y x, la distancia del lente al objeto.

40 Sabrina tiene una lupa, cuya distancia focal es de 10 cm.

a) ¿Cuál es la expresión que relaciona el aumento de la lente y la distancia al objeto?

b) ¿A qué distancia debe colocar Sabrina el objeto para que este se vea en tamaño real?

c) ¿A qué distancia del objeto debe ubicar la lupa para que el tamaño sea mayor del real?

d) ¿Qué pasaría si colocara el objeto a 10 cm de la lupa?

e) Grafiquen la función ajustada al problema.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

La primera ley cuantitativa en la historia de la Física

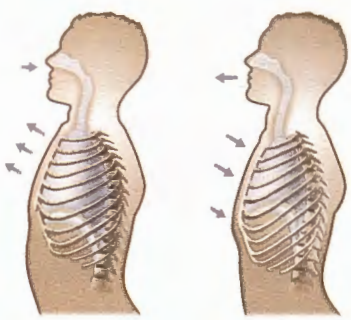
Los primeros físicos que estudiaron la relación entre el volumen de un gas y la presión[1] que ejerce este sobre las paredes del recipiente que lo contiene, en forma paralela e independiente, fueron el británico Robert Boyle (1627-1691) y el francés Edme Mariotte (1620-1684). El resultado, que tiene validez para presiones no muy elevadas, es la conocida Ley de Boyle–Mariotte (1662), la cual constituye la primera ley cuantitativa en la historia de la Física, y dice:

"A temperatura constante, los volúmenes de una masa gaseosa son inversamente proporcionales a la presión que soporta, es decir, que el producto entre la presión (P) y el volumen (V) es una constante":

$$P \cdot V = k, \text{ es decir: } V = \frac{k}{P}.$$

Las unidades de presión más usadas son el $\frac{\vec{kg}}{cm^2}$ y la atmósfera, que equivale a 1,033 $\frac{\vec{kg}}{cm^2}$.

Muchos peces tienen lo que se llama *vejiga natatoria*, que les permite flotar entre aguas. Si el pez sube, la vejiga aumenta su volumen.



En la inspiración, el diafragma se contrae, y aumenta el volumen de la caja torácica. Esto se debe a que la presión interna disminuye, el aire de la atmósfera ingresa y aumenta el volumen de los pulmones. En la expiración, la presión interna aumenta, y el pulmón se desinfla.

41 Una jeringa contiene 15 cm³ de aire a una temperatura constante y a una presión de 1 atmósfera.

a) Calculen la constante de proporcionalidad k.

b) Supongan que se tapa el orificio de salida y se comienza a variar la presión interna al empujar el émbolo, y escriban la expresión que relaciona el cambio de volumen en función de la presión.

c) ¿Cuál es el volumen, si se ejerce una presión de 1,3 atmósferas?

d) ¿Cuál sería la presión, si se desea un volumen de 8 cm³?

e) Grafiquen la función que relaciona el cambio de volumen en función de la presión.

[1] Se define *presión* al cociente entre el módulo de la fuerza ejercida perpendicularmente a una superficie y el área de esta: $p = \frac{f}{a}$.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

42 De las siguientes funciones, indiquen el dominio, la imagen, los puntos de discontinuidad y las ecuaciones de las asíntotas.

a) $f(x) = \frac{-9}{x - 1}$

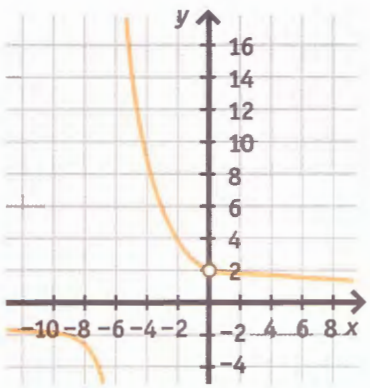
b) $m(x) = \frac{3x}{x + 5}$

c) $h(x) = \frac{8}{x^2}$

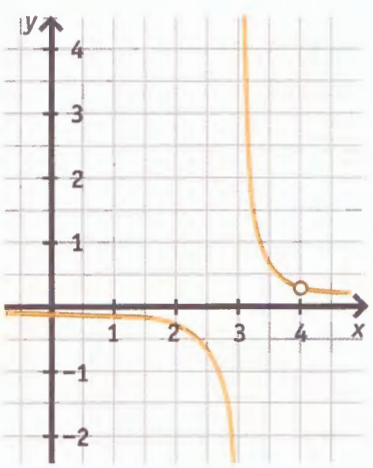
d) $p(t) = \frac{t^2 + 3t}{t^2 - 9}$

43 Los gráficos siguientes corresponden a las funciones racionales. Para cada función, indiquen el dominio, la imagen, los puntos de discontinuidad y las ecuaciones de las asíntotas.

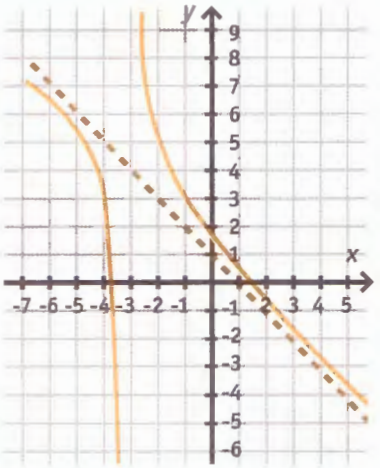
a)



b)



c)



44 Teniendo en cuenta los gráficos del ejercicio anterior, calculen los siguientes límites:

a) Del gráfico a)

I. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

II. $\lim_{x \to -2} f(x)$

b) Del gráfico b)

I. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

II. $\lim_{x \to 4} f(x)$

c) Del gráfico c)

I. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

II. $\lim_{x \to -3} f(x)$

45 Consideren una lente de 5 cm de distancia focal.

a) Escriban la expresión que relaciona la distancia a un objeto en función del aumento.

b) ¿A qué distancia se debería colocar un objeto para lograr que su imagen se duplique?

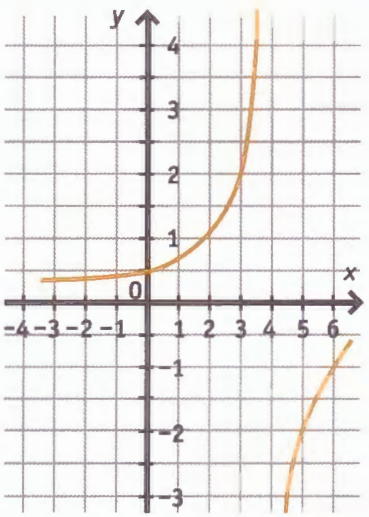
c) Si colocamos el objeto a una distancia de 3,75 cm, ¿de cuánto es el aumento?

d) Grafiquen la función que relaciona la distancia focal y la distancia del lente al objeto.

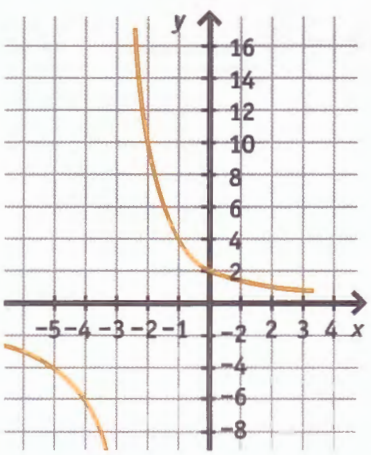
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

46 Las siguientes gráficas corresponden a funciones de fórmula $f(x) = \frac{k}{x + b}$. Hallen la fórmula correspondiente a cada una.

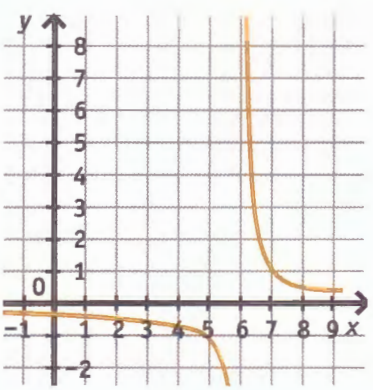
a)



b)



c)



47 De cada una de las siguientes funciones, indiquen el dominio, la imagen, las coordenadas de los puntos de contacto con los ejes, los conjuntos de positividad y de negatividad, las ecuaciones de las asíntotas, los puntos de discontinuidad, y grafiquen la función.

a) $f(x) = \frac{-x - 1}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \frac{4}{x^2 + 2}$

c) $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x}$

d) $f(x) = -\frac{2}{(x + 4)^2}$

48 Eliana es dueña de un restaurante y dispone de $40 000 mensuales para el sueldo de sus empleados.

a) Si el restaurante tiene 40 empleados y todos cobran igual, ¿cuánto cobra cada uno?

b) Encuentren la fórmula que permite calcular lo que cobra cada uno en función de la cantidad de empleados.

c) Si se deben descontar $40 fijos en concepto de ART, de lo que cobra cada empleado, ¿cuál sería ahora la expresión que relaciona el sueldo de cada uno en función del número de empleados?

d) ¿Cuántos empleados debería tener el restaurante para que cada uno cobre $760?

e) Grafiquen ambas funciones en el mismo sistema cartesiano. Consideren el dominio de validez para la situación.

49 Elaboren una gráfica en forma aproximada que cumpla con las condiciones que se indican en cada caso.

a) $Dom_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$

$\lim_{x \to -2} f(x) = \infty$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

b) $Dom_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -4$

$C° = \{4\}$

c) $Dom_f = \mathbb{R} - \{-3; 5\}$

$\lim_{x \to 5} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -3} f(x) = 1$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$

$C° = \{4\}$

50 Escriban la fórmula de una función racional que cumpla con las condiciones indicadas en cada caso:

a) A H: $y = 0$ y A V: $x = -5$

b) A H: $y = -2$ y A V: $x = 3$

51 Dada la expresión $f(x) = \frac{mx^2 - 2x}{dx^2 + 4}$, asígnenles valores a m y a d para que la asíntota horizontal de $f(x)$ sea la indicada en cada caso.

a) $y = -2$

b) $y = 5$

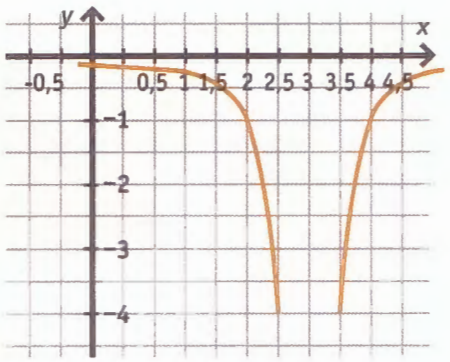
52 Indiquen el dominio de f, la ecuación correspondiente a la asíntota oblicua y a la asíntota vertical, en cada caso.

a) $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x + 1}$

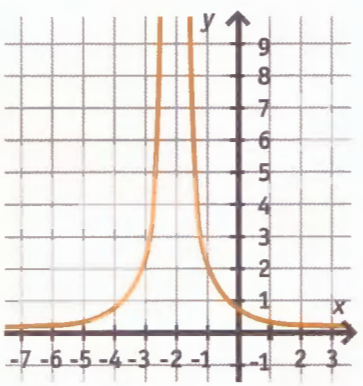
b) $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 + 6}$

53 Los siguientes gráficos responden a funciones de la fórmula $f(x) = \frac{k}{(x - b)^2}$. Encuentren los valores de k y de b que se ajustan a cada caso.

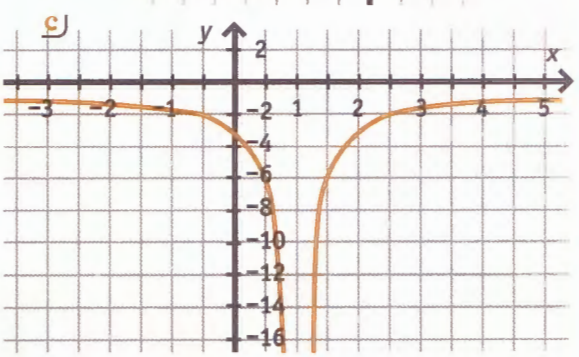
a)



b)



c)



54 Elaboren la gráfica aproximada de una función que cumpla con las siguientes condiciones.

$Dom_f = \mathbb{R} - \{4\}$

$\lim_{x \to 4} f(x) = \infty$

Asíntota oblicua: $y = 2x + 2$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

AUTOEVALUACIÓN

Marquen la opción correcta.

1 Consideren la función $f(x) = \frac{6x^2 - 2}{cx + b}$. Los valores de c y b para que la asíntota horizontal sea $y = -1$, y la vertical, $x = \frac{1}{2}$ son:

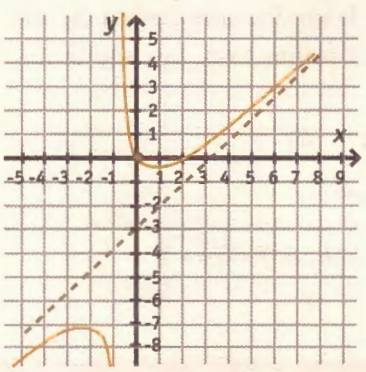
- a) $c = -1$ y $b = 2$
- b) $c = -6$ y $b = \frac{1}{2}$
- c) $c = -6$ y $b = 3$
- d) $c = 6$ y $b = -3$

2 La función que tiene como asíntota vertical $x = 3$ y como conjunto de negatividad el intervalo $(0; 3)$ es:

- a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3}$
- b) $f(x) = \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 9}$
- c) $f(x) = \frac{x^2}{-x^2 + 3x}$
- d) $f(x) = \frac{4x^2}{x^2 - 3x}$

3 La función racional que se ajusta a la gráfica es:

- a) $f(x) = \frac{-x^3 + 2x^2}{x^2 + x}$
- b) $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2}{x^2 + x}$
- c) $f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2}{x^2 + x}$
- d) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + x}$

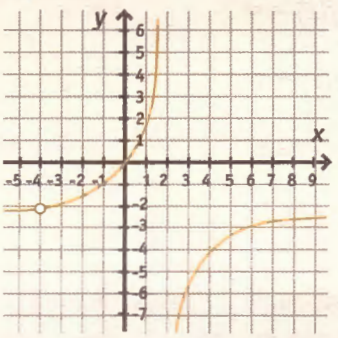


4 La función que cumple con las condiciones:

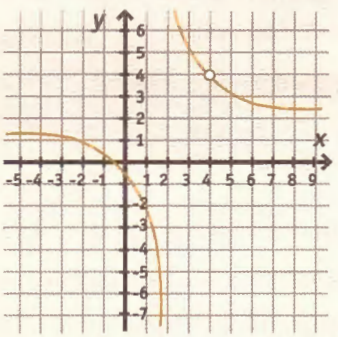
- $Dom_f = \mathbb{R} - \{2; 4\}$
- $\lim_{x \to 2} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = -2$
- $\lim_{x \to 4} f(x) = -4$

tiene por gráfica:

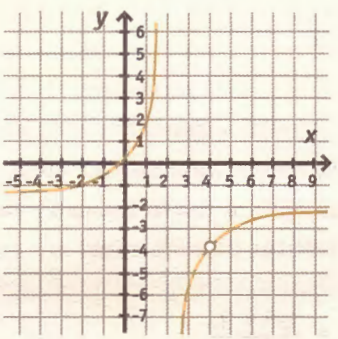
a)



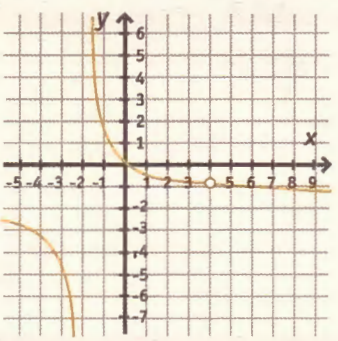
b)



c)



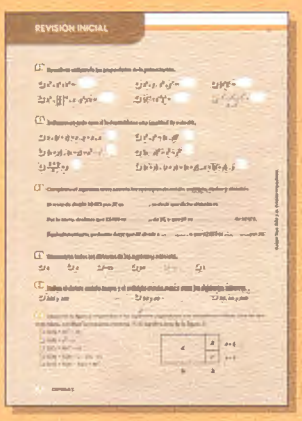
d)



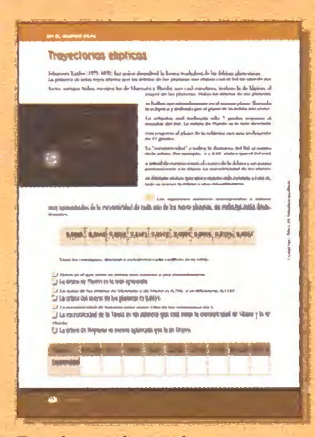
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Cómo son estos cuadernillos

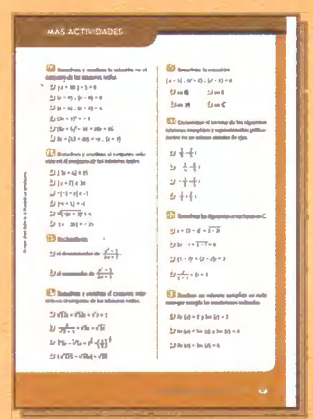
Apertura
Una situación disparadora es el eje que abre cada capítulo.



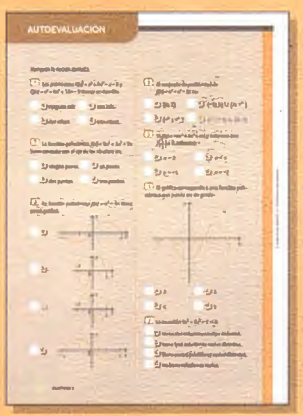
Revisión inicial
Incluye actividades para repasar los conocimientos previos.



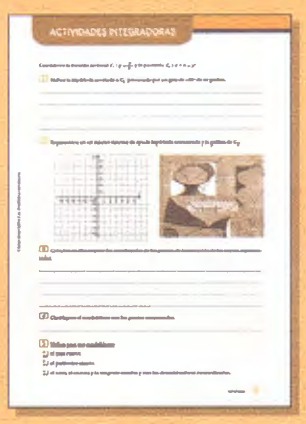
En el mundo real
Trata ejemplos con datos concretos, vinculados a aplicaciones a otras disciplinas y a situaciones cotidianas.



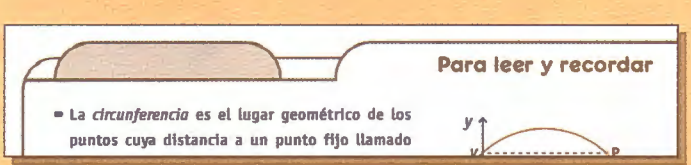
Más actividades
Contiene una serie adicional de ejercitaciones diversas de todos los temas desarrollados en el capítulo.



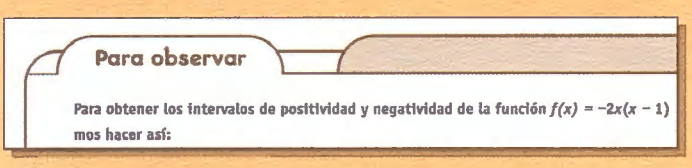
Autoevaluación
Se propone una combinación de actividades que servirá a modo de evaluación de los contenidos tratados en el capítulo.



Actividades integradoras
Al final de los cuadernillos 3 y 5, se presenta una sección con propuestas destinadas a interrelacionar los contenidos de los cuadernillos anteriores.



Los recuadros identificados con la leyenda **Para leer y recordar** contienen información necesaria para la resolución de las actividades (conceptos, fórmulas, definiciones).



Los recuadros identificados con la leyenda **Para observar** contienen ejemplos explicados.

Un número con fondo de color indica que la actividad es de mayor complejidad.

AIQUE